RISOLUZIONE NUMERICA DELL'INSTABILITA' EULERIANA DI ASTE CON SPESSORE COSTANTE A TRATTI ATTRAVERSO IL FOGLIO MATHEMATICA

Ing. Davide Cicchini

IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

L'EQUAZIONE CHE GOVERNA IL PROBLEMA DELL'INSTABILITÀ È LA SEGUENTE

$$\boxed{E\,I\,\frac{d^4v}{dz^4} + N\frac{d^2v}{dz^2} = 0}$$

- v è l'inflessione della trave
- z è l'asse della trave

L'equazione si può riscrivere nel modo seguente

$$\boxed{\frac{d^4v}{dz^4} + \alpha^2\frac{d^2v}{dz^2} = 0} \qquad \boxed{\alpha^2 = \frac{N}{EI}}$$

La soluzione dell'equazione differenziale è del tipo:

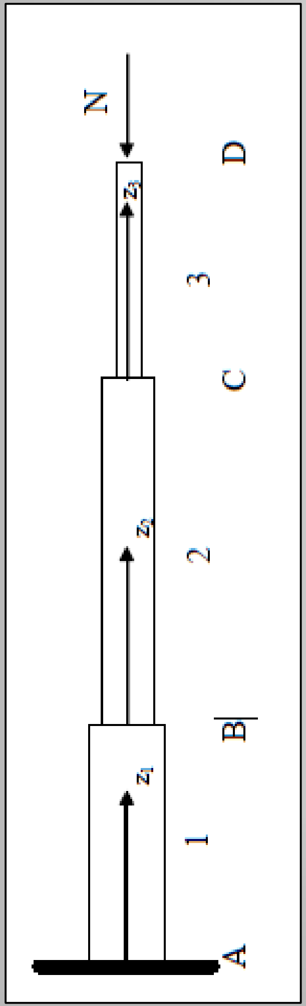
$$\boxed{v = A\,\sin(\alpha z) + B\,\cos(\alpha z) + Cz + D}$$

A, B, C e D : costanti di integrazione da determinare imponendo opportune condizioni al contorno.

Ing. Davide Cicchini

IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

Nel caso di aste a sezione variabile si può operare la seguente semplificazione: Il tronco può essere suddiviso in «n» tratti a sezione costante, in questo modo si approssima l'andamento variabile della sezione. Si riporta di seguito il caso generico per n=3. Il file mathematica supporta fino a 6 tratti



Si devono scrivere 3 equazioni una per ogni tratto :

$$
\begin{aligned}
\frac{d^4 v_1}{dz_1^4} + \alpha_1^2 \frac{d^2 v_1}{dz_1^2} &= 0 \\
\frac{d^4 v_2}{dz_2^4} + \alpha_2^2 \frac{d^2 v_2}{dz_2^2} &= 0 \\
\frac{d^4 v_3}{dz_3^4} + \alpha_3^2 \frac{d^2 v_3}{dz_3^2} &= 0
\end{aligned}
$$

le cui soluzioni sono:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= A_1 \sin(\alpha_1 z_1) + B_1 \cos(\alpha_1 z_1) + C_1 z_1 + D_1 \\
v_2 &= A_2 \sin(\alpha_2 z_2) + B_2 \cos(\alpha_2 z_2) + C_2 z_2 + D_2 \\
v_3 &= A_3 \sin(\alpha_3 z_3) + B_3 \cos(\alpha_3 z_3) + C_3 z_3 + D_3
\end{aligned}
$$

Si pone:

$$
\alpha_1^2 = \frac{N}{EI_1} \qquad \alpha_2^2 = \frac{N}{EI_2} \qquad \alpha_3^2 = \frac{N}{EI_3}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha \\
\alpha_2 &= \beta\, \alpha \\
\alpha_3 &= \gamma\, \alpha
\end{aligned}
$$

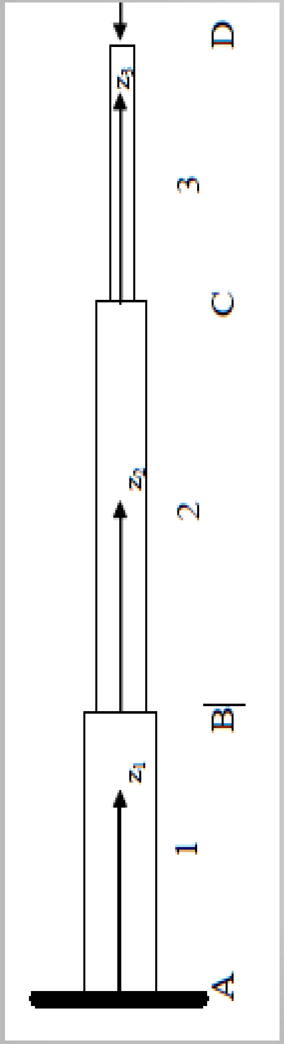
con:

$$
\begin{aligned}
\beta &= \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} & \gamma &= \sqrt{\frac{I_1}{I_3}} \\
\beta^2 &= \frac{I_1}{I_2} & \gamma^2 &= \frac{I_1}{I_3} \\
I_2 &= \frac{I_1}{\beta^2} & I_3 &= \frac{I_1}{\gamma^2}
\end{aligned}
$$

Ing. Davide Cicchini

IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

SI DEFINISCONO LE CONDIZIONI AL CONTORNO E SI ESPLICITANO LE EQUAZIONI



$$
\begin{aligned}
v_1(0) &= 0\\
\varphi_1(0) &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_1(L_1) &= v_2(0)\\
\varphi_1(L_1) &= \varphi_2(0)\\
M_1(L_1) &= M_2(0)\\
T_1(L_1) &= T_2(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
v_2(L_2) &= v_3(0)\\
\varphi_2(L_2) &= \varphi_3(0)\\
M_2(L_2) &= M_3(0)\\
T_2(L_2) &= T_3(0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_3(L_3) &= 0\\
T_3(L_3) &= N \left.\frac{dv_3}{dz_3}\right|_{L_3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= B_1 + D_1\\
0 &= \alpha A_1 + C_1\\
0 &= A_1 \sin(\alpha L_1) + B_1 \cos(\alpha L_1) + C_1 L_1 + D_1 - [B_2 + D_2]\\
0 &= \alpha A_1 \cos(\alpha L_1) + \alpha B_1 \sin(\alpha L_1) + C_1 - [(\beta\,\alpha) A_2 + C_2]\\
0 &= \alpha^2 A_1 \sin(\alpha L_1) + \alpha^2 B_1 \cos(\alpha L_1) - (\beta\,\alpha)^2 B_2\\
0 &= \alpha^3 A_1 \cos(\alpha L_1) + \alpha^3 B_1 \sin(\alpha L_1) - (\beta\,\alpha)^3 A_2\\
0 &= A_2 \sin((\beta\,\alpha) L_2) + B_2 \cos((\beta\,\alpha) L_2) + C_2 L_2 + D_2 - [B_3 + D_3]\\
0 &= (\beta\,\alpha) A_2 \cos((\beta\,\alpha) L_2) + (\beta\,\alpha) B_2 \sin((\beta\,\alpha) L_2) + C_2 - [(\gamma\,\alpha) A_3 + C_3]\\
0 &= (\beta\,\alpha)^2 A_2 \sin((\beta\,\alpha) L_2) + (\beta\,\alpha)^2 B_2 \cos((\beta\,\alpha) L_2) - (\gamma\,\alpha)^2 B_3\\
0 &= (\beta\,\alpha)^3 A_2 \cos((\beta\,\alpha) L_2) + (\beta\,\alpha)^3 B_2 \sin((\beta\,\alpha) L_2) - (\gamma\,\alpha)^3 A_3\\
0 &= -EI_3 \left[(\gamma\,\alpha)^2 A_3 \sin((\gamma\,\alpha) L_3) + (\gamma\,\alpha)^2 B_3 \cos((\gamma\,\alpha) L_3)\right]\\
0 &= -EI_3 \left[(\gamma\,\alpha)^3 A_3 \cos((\gamma\,\alpha) L_3) + (\gamma\,\alpha)^3 B_3 \sin((\gamma\,\alpha) L_3)\right]\\
&\quad -N\left[(\gamma\,\alpha) A_3 \cos((\gamma\,\alpha) L_3) + (\gamma\,\alpha) B_3 \sin((\gamma\,\alpha) L_3) + C_3\right]
\end{aligned}
$$

Ponendo:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= \sin(\alpha L_1) & c_1 &= \cos(\alpha L_1)\\
s_2 &= \sin((\beta\alpha) L_2) & s_2 &= \cos((\beta\alpha) L_2)\\
s_3 &= \sin((\gamma\alpha) L_3) & s_3 &= \cos((\gamma\alpha) L_3)
\end{aligned}
$$

si ottiene il seguente sistema di equazioni omogeneo:

$$
\mathrm{M}\ \mathrm{X} = 0
$$

Ing. Davide Cicchini

IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA MATEMATICO

SI OTTIENE IL SEGUENTE SISTEMA DI EQUAZIONI OMOGENEO: **M X = 0**

dove:

$$
\mathrm{M} = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
s_1 & c_1 & L_1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_1\ c_1 & \alpha_1 s_1 & 1 & 0 & -\alpha_2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_1^2 s_1 & \alpha_1^2 c_1 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_1^3 c_1 & \alpha_1^3 s_1 & 0 & 0 & -\alpha_2^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s_2 & c_2 & L_2 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2 c_2 & \alpha_2 s_2 & 1 & 0 & -\alpha_3 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^2 s_2 & \alpha_2^2 c_2 & 0 & 0 & 0 & -\alpha_3^2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2^3 c_2 & \alpha_2^3 s_2 & 0 & 0 & -\alpha_3^3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -EI_3\alpha_3^2 s_3 & -EI_3\alpha_3^2 c_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_3^3 c_3 & -2\alpha_3^3 s_3 & -\alpha_3^2 & 0
\end{bmatrix}
$$

$$
\mathrm{X} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \\ A_3 \\ B_3 \\ C_3 \\ D_3 \end{Bmatrix} \qquad 0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
$$

Per ottenere una soluzione del sistema di equazioni diversa dalla banale, si impone il determinate della matrice dei coefficienti uguale a zero.

Risolvendo l’equazione rispetto a N, e scegliendo il valore minimo di N che soddisfa l’equazione del determinante, si ricava il carico critico Nc. In particolare si deve risolvere l’equazione rispetto ad α, da cui si ricava Nc per non avere problemi di natura numerica.

Ing. Davide Cicchini

RICAVARE IL CARICO CRITICO DELL'ASTA

Se si decide di dividere il tronco dell'asta in sei tratti, si devono scrivere 6 equazioni di campo e 24 condizioni al contorno. Altrimenti se si vuole considerare lo spessore costante nei dati si dovrà riscrivere per ogni riga lo stesso spessore. Con questa logica si possono creare diverse combinazioni per la variazione dello spessore.

Definizione dati

```
Es = 210000000; (*[kN/m^2]*)
Res1 = 2; (*[m]*)
Res2 = 1.7; (*[m]*)
Res3 = 1.4; (*[m]*)
Res4 = 1.1; (*[m]*)
Res5 = 0.8; (*[m]*)
Res6 = 0.5; (*[m]*)
Ri1 = 1.98; (*[m]*)
Ri2 = 1.68; (*[m]*)
Ri3 = 1.38; (*[m]*)
Ri4 = 1.08; (*[m]*)
Ri5 = 0.78; (*[m]*)
Ri6 = 0.48; (*[m]*)
h1 = 16.17; (*[m]*)
h2 = 16.17; (*[m]*)
h3 = 16.17; (*[m]*)
h4 = 16.17; (*[m]*)
h5 = 16.17; (*[m]*)
h6 = 16.17 (*[m]*)
```

Equazioni di Campo

```
w1[x_] = C[1] * Sin[α1 x] + C[2] * Cos[α1 x] + C[3] * x + C[4];
w2[x_] = C[5] * Sin[α2 x] + C[6] * Cos[α2 x] + C[7] * x + C[8];
w3[x_] = C[9] * Sin[α3 x] + C[10] * Cos[α3 x] + C[11] * x + C[12];
w4[x_] = C[13] * Sin[α4 x] + C[14] * Cos[α4 x] + C[15] * x + C[16];
w5[x_] = C[17] * Sin[α5 x] + C[18] * Cos[α5 x] + C[19] * x + C[20];
w6[x_] = C[21] * Sin[α6 x] + C[22] * Cos[α6 x] + C[23] * x + C[24];
```

- In particolare si individuano 6 tratti a sezione costante che hanno le caratteristiche riportate a sinistra;
- Dalla risoluzione del sistema realizzato dalle condizioni al contorno si ricava la matrice dei coefficienti, di dimensioni 24X24. Si calcola poi il determinante uguagliandolo a zero.
- Tutta l'equazione è funzione del parametro alpha:

$$\alpha = \frac{N_{cr}}{EI_1}$$

Condizioni al Contorno

```
cc1 = w1[0] == 0;
cc2 = φ1[0] == 0;
cc3 = w1[h1] - w2[0] == 0;
cc4 = φ1[h1] - φ2[0] == 0;
cc5 = M1[h1] - M2[0] == 0;
cc6 = T1[h1] - T2[0] == 0;
cc7 = w2[h2] - w3[0] == 0;
cc8 = φ2[h2] - φ3[0] == 0;
cc9 = M2[h2] - M3[0] == 0;
cc10 = T2[h2] - T3[0] == 0;
cc11 = w3[h3] - w4[0] == 0;
cc12 = φ3[h3] - φ4[0] == 0;
cc13 = M3[h3] - M4[0] == 0;
cc14 = T3[h3] - T4[0] == 0;
cc15 = w4[h4] - w5[0] == 0;
cc16 = φ4[h4] - φ5[0] == 0;
cc17 = M4[h4] - M5[0] == 0;
cc18 = T4[h4] - T5[0] == 0;
cc19 = w5[h5] - w6[0] == 0;
cc20 = φ5[h5] - φ6[0] == 0;
cc21 = M5[h5] - M6[0] == 0;
cc22 = T5[h5] - T6[0] == 0;
cc23 = M6[h6] == 0;
cc24 = T6[h6] - α^2 * Es * Ine1 == 0;
```

Ing. Davide Cicchini

RICAVARE IL CARICO CRITICO DELL’ASTA

La funzione ricavata dal determinante della matrice è fortemente non lineare ad andamento oscillatorio, questo a causa della forma della soluzione generale essendo questa formata da seni e coseni.

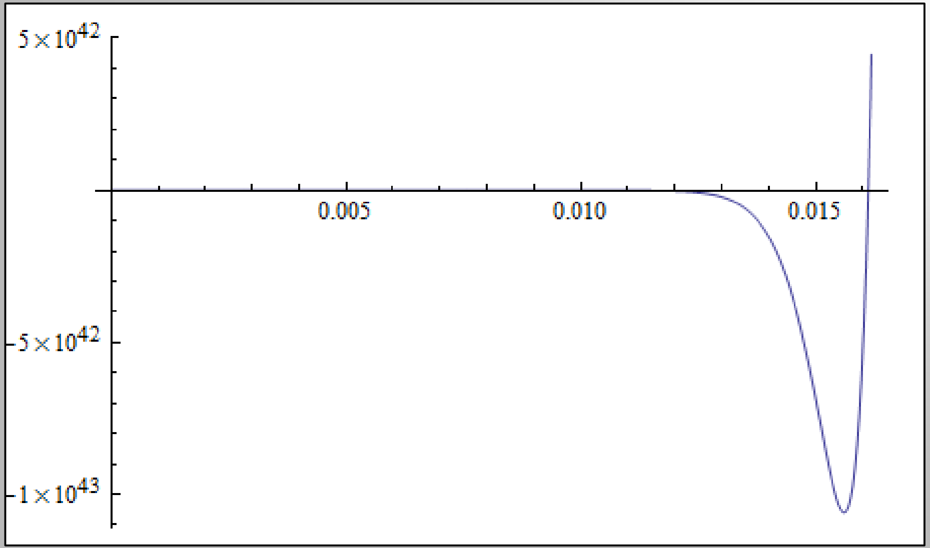
La funzione si annulla sempre all’origine, soddisfacendo così la soluzione banale del problema omogeno sopra illustrato.

Si osserva inoltre che valori molto grandi di alpha non hanno nessun significato fisico, si cerca in questo senso un valore massimo da attribuire alla variabile.

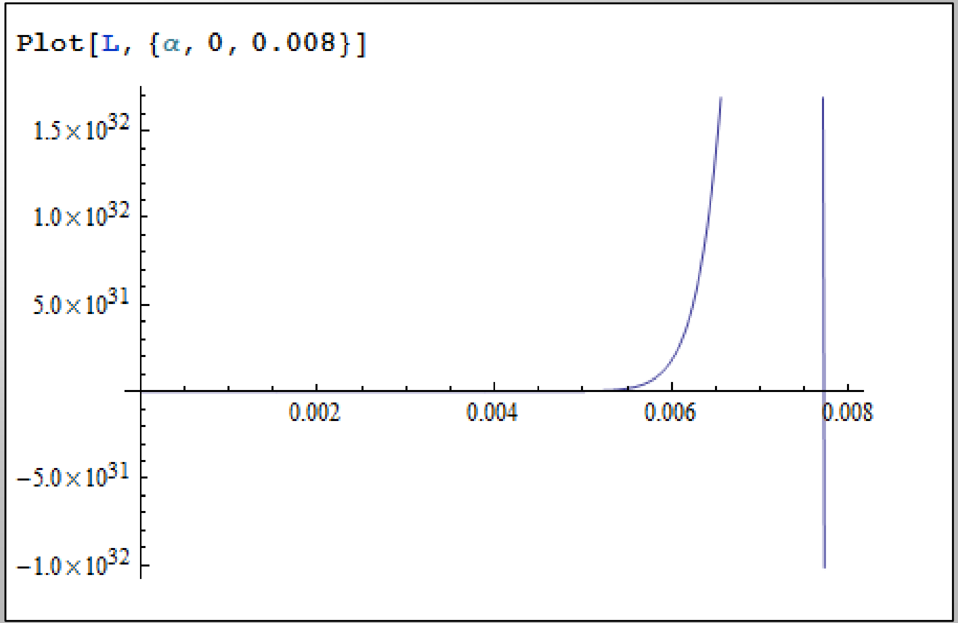
In particolare il massimo valore di alpha corrisponde al carico critico che l' asta avrebbe se fosse formata per tutta la sua lunghezza dalla sezione più grande, ossia quella di base. Eseguendo il calcolo si ricava l’intervallo:

$$\alpha_{min} = 0 \qquad\qquad \alpha_{max} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

Quindi si cerca la soluzione in questo intervallo



Dopo alcuni tentativi si trova la radice cercata nell’intervallo 0-0,008
α = **0.00771**



Ing. Davide Cicchini

RICAVARE IL CARICO CRITICO DELL'ASTA

La soluzione ottenuta fornisce il più piccolo carico critico che instabilizza l'asta a sezione variabile.

$$\alpha = \frac{N_{cr}}{EI_1} \Rightarrow 0.117166 = \frac{N_{cr}}{EI_1} \Rightarrow N_{cr} = 6192.94 \text{ kN}$$

E' utile confrontare il valore appena ricavato con i valori massimi e minimi del carico critico riportati sotto; in sostanza la soluzione deve essere sempre compresa tra questi due valori per essere fisicamente accettabile.

Il carico critico massimo si ricava considerando l'asta costante con sezione uguale a quella di base, viceversa il minimo con sezione uguale a quella di sommità.

$$N_{cr,max} = 27257{,}5 \text{ kN} \qquad N_{cr,min} = 407{,}1 \text{ kN}$$

Ing. Davide Cicchini