COSTRUZIONE DEL DIAGRAMMA MOMENTO-CURVATURA (SEMPLIFICATO)

1 PREMESSA

La sopravvivenza delle strutture in cemento armato sottoposte ad azioni eccezionali non può essere affidata alla sola resistenza, per problemi di costi, si deve invece prevedere la fuoriuscita della struttura dal campo elastico con deformazioni plastiche anche rilevanti, senza tuttavia che essa pervenga al collasso.

E' necessario pertanto che le strutture posseggano una adeguata duttilità.

A livello del materiale, la duttilità si valuta sui legami costitutivi. Infatti assegnato un certo stato tensionale nel punto, l'area al di sotto del diagramma σ-ε rappresenta l'energia per unità di volume che il materiale ha immagazzinato.

Allo scarico da tale punto solo una parte dell'energia viene restituita, se venisse restituita tutta si tratterebbe di un materiale elastico, l'aliquota che non viene restituita è stata dissipata plasticamente ed è asservita a salvaguardare l'intera struttura senza pervenire al collasso; di conseguenza il materiale presenta deformazioni permanenti allo scarico.

In particolare la duttilità μ si definisce come il rapporto fra la deformazione ultima e la deformazione di snervamento, fornendo così un valore maggiore dell'unità.

In riferimento all'acciaio B450c si ha:

Deformazione ultima $\varepsilon_{ud} = 6{,}75\%$

Allungamento allo snervamento $\varepsilon_{ud} = 1{,}86‰$

$$\mu = \frac{6{,}75\%}{1{,}86‰} = 36{,}3$$

In riferimento all'acciaio Fe B44 k si ha:
Deformazione ultima $\varepsilon_{ud} = 10‰$
Allungamento allo snervamento $\varepsilon_{ud} = 1,86‰$

$$\mu = \frac{10‰}{1,86‰} = 5,4$$

Per cui l'acciaio da carpenteria Fe B44 k è molto meno duttile dell'acciaio B450c.

Nel caso dei materiali fragili, la duttilità si valuta come il rapporto tra la deformazione ultima e la deformazione che segna l'ingresso nel campo plastico del materiale.

In riferimento al calcestruzzo modello parabola-rettangolo:
Deformazione ultima $\varepsilon_{cu} = 3,5‰$
Allungamento allo snervamento $\varepsilon_{c2} = 2‰$

$$\mu = \frac{3,5‰}{2‰} = 1,8$$

Dunque l'acciaio è enormemente più duttile del calcestruzzo.

Se dal materiale si passa alla sezione il comportamento strutturale è definito dal diagramma momento-curvatura.
Ovvero ad ogni momento applicato M con sforzo normale nullo (flessione semplice) o sforzo normale costante (pressoflessione) corrisponde una curvatura 1/r della sezione; il grafico di tutte le coppie (M , 1/r) è definito come il diagramma momento-curvatura.
L'area al di sotto del diagramma momento-curvatura, fissato in certo punto della curva rappresenta l'energia per unità di lunghezza che l'elemento strutturale ha immagazzinato, si potrebbe dire che rappresenti l'energia della sezione. Se si volesse passare dall'energia immagazzinata nella sezione a quella dell'intero elemento si dovrebbe integrare il diagramma momento-curvatura sull'intera lunghezza

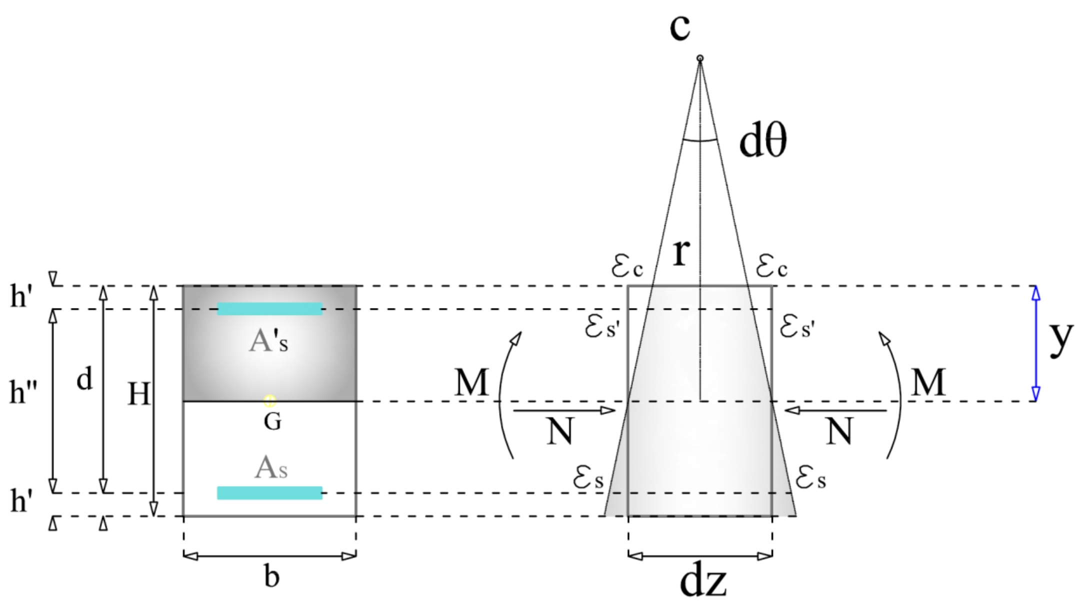
dell'elemento. Tale integrazione definisce una rotazione che rappresenta la rotazione complessiva, in parte elastica ed in parte plastica, dell'elemento non lineare.

La valutazione di tali rotazioni, ed in particolare della parte plastica, è argomento di estrema importanza per le costruzioni in zona sismica.

Esistono diverse formulazioni che ne consentono la valutazione, dal punto di vista applicativo e normativo si utilizzano formulazioni semplificate che in genere si basano sulla definizione di "lunghezza della cerniera plastica".

La curvatura di una sezione inflessa o pressoinflessa è immediatamente riconducibile al diagramma delle deformazioni assiali. Infatti nella sola ipotesi della conservazione delle sezioni piane, considerando un concio elementare si ottiene quanto rappresentato in figura (Fig. 1.1).

Le facce opposte del concio di trave ruotano attorno al punto C e la distanza tra C e l'asse neutro è proprio il raggio di curvatura della sezione, mentre il suo inverso è la curvatura della sezione.



(Fig. 1.1) Curvatura di una sezione pressoinflessa

Se si assume dz la lunghezza infinitesima del concio pari a 2, è lecito confondere deformazioni ed allungamenti.

Dalla similitudine dei triangoli che la sezione deformata crea si ottiene immediatamente che:

$$\frac{\Delta z}{2} : \varepsilon_c = r : y$$

Essendo per ipotesi $\frac{\Delta z}{2} = 1$ si riscrive:

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_c}{y} = \frac{\varepsilon_s}{d - y} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d}$$

Il raggio di curvatura r si definisce anche retta delle deformazioni.

In pratica la curvatura della sezione rappresenta la pendenza del diagramma delle deformazioni della sezione.
Per esempio in condizione ultime la crisi della sezione avverrà sicuramente a causa del raggiungimento della deformazione ultima nel calcestruzzo compresso, in quanto la capacità di deformazione nell'acciaio è molto elevata e pertanto non può essere raggiunta prima di quella del calcestruzzo.

2 CALCOLO DEL DIAGRAMMA MOMENTO CURVATURA SEMPLIFICATO PER SEZIONI INFLESSE

Si considera una sezione rettangolare inflessa.

Il diagramma momento curvatura si può costruire in modo eccellente studiando la sezione in due condizioni: all'innesco dello snervamento dell'acciaio e allo stato limite ultimo per collasso del calcestruzzo a compressione.

Si inizia con lo studio della condizione ultima, ossia quando il calcestruzzo ha raggiunto il limite a compressione. Da questa analisi si ricaverà il momento resistente della sezione e si ipotizzerà che sia la stessa resistenza offerta dalla sezione all'innesco dello snervamento.

CONDIZIONE ULTIMA PER IL CALCESTRUZZO

La curvatura ultima della sezione si ricava attraverso la seguente relazione:

$$\chi_u = \left(\frac{1}{r}\right)_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_u} = 0{,}8\,\frac{\varepsilon_{cu}}{H}\frac{1}{\omega - \omega'}$$

Dove ω è la percentuale meccanica di armatura in zona tesa:

$$\omega = \frac{A_s f_{yd}}{bHf_{cd}}$$

e ω' è la percentuale meccanica di armatura in zona compressa:

$$\omega' = \frac{A'_s f_{yd}}{bHf_{cd}}$$

Per definire il momento resistente si usa la relazione semplificata:

$$M_{rd} = 0{,}9d\ A_s\ f_{yd}$$

Si ottiene così la coppia di valori $(\chi_u\,;\ M_{rd})$

INIZIO DELLO SNERVAMENTO

Nel caso degli elementi inflessi la curvatura allo snervamento si può ricavare con la seguente relazione:

$$\chi_y = \left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{\varepsilon_{yd}}{d - y_e} \cong 1{,}4\,\frac{\varepsilon_{yd}}{d}$$

Dove $\varepsilon_{yd} = 1{,}86$‰ è la deformazione a cui corrisponde lo snervamento dell'acciaio sul legame elasto-plastico e y_e rappresenta la posizione dell'asse neutro della sezione inflessa in condizioni elastiche. Poiché $y_e \cong 0{,}25d$ si definisce la formula semplificata per il calcolo della curvatura allo snervamento.
Inoltre si fa l'ipotesi che all'innesco dello snervamento dell'acciaio la sezione abbia raggiunto il momento resistente valutato per la condizione allo stato limite ultimo. Quindi si ottiene la coppia di valori $(\chi_y\,;\,M_{rd})$

Si osserva che l'armatura compressa influisce poco sulla resistenza, mentre interviene molto sulla duttilità. Infatti la Normativa Italiana per la zona sismica impone una percentuale di armatura compressa pari al 50% di quella tesa nelle zone critiche e al 25% in tutte le altre zone.

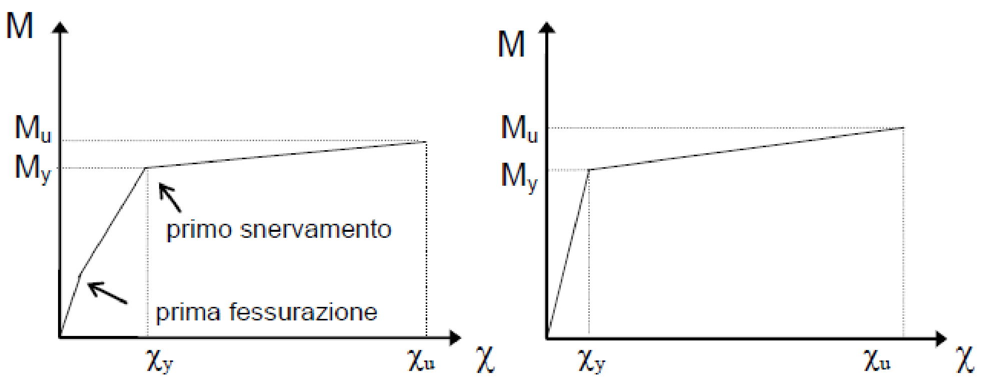
I risultati di laboratorio di parecchi sperimentatori hanno permesso di definire un insieme di regole progettuali che permettono di conferire duttilità alle sezioni in c.a.:

- Per una sezione rettangolare, la duttilità aumenta al crescere della resistenza del calcestruzzo e diminuisce al crescere della tensione di snervamento dell'acciaio (e questo di solito non è correttamente valutato);
- Per una sezione rettangolare diminuisce al crescere della percentuale di armatura tesa e aumenta al crescere della percentuale di armatura compressa;
- Per una sezione a T aumenta al crescere dell'area delle ali;
- Per una sezione rettangolare soggetta a sforzo normale costante diminuisce al crescere dello sforzo normale stesso;
- Per una sezione inflessa aumenta se si infittiscono adeguatamente le staffe.

Per una sezione semplicemente inflessa, il diagramma momento – curvatura è lineare nel tratto iniziale e la relazione tra il momento M e la curvatura χ è data dalla classica equazione elastica $M = EI \cdot \chi$ dove EI è la rigidezza a flessione della sezione. Con l'incremento del momento, la fessurazione del conglomerato riduce la rigidezza flessionale e conseguentemente la pendenza del diagramma, fino allo snervamento dell'acciaio. Quando l'acciaio snerva, si nota un elevato incremento di curvatura a momento flettente pressoché costante. In sezioni fortemente armate lo snervamento dell'acciaio è preceduto da elevate deformazioni anelastiche del calcestruzzo ed il cedimento è fragile, tranne nel caso in cui il nucleo non sia confinato da adeguata staffatura.

Per assicurare un comportamento duttile, vengono usate per le travi quantità di acciaio minori di quelle corrispondenti ad una "rottura bilanciata", in cui la crisi è provocata contemporaneamente dallo schiacciamento del calcestruzzo e dallo snervamento dell'acciaio teso.

La relazione momento-curvatura in cui l'acciaio teso giunge a snervamento può essere idealizzata con una trilatera (Fig. 2.1 a), però è sufficientemente accurato rappresentare la curva anche con una bilatera (Fig. 2.2 b). Infatti, l'idealizzazione trilineare meglio rappresenta l'effettivo comportamento della sezione nel suo primo caricamento, ma, una volta che la fessurazione si è stabilizzata, la relazione $M - \chi$ è approssimativamente lineare fino all'inizio dello snervamento. Dunque, le relazioni bilineari sono idonee a rappresentare travi già fessurate.



(Fig. 2.2) relazione momento-curvatura trilineare (a) e bilineare (b).

Il diagramma bilineare descrive eccellentemente la legge di variazione del momento in funzione della curvatura. Inoltre essendo costituito da due rette risulta immediato operare in modo semplificato per ottenere tale diagramma.
Infatti con l'ausilio di tre punti noti è possibile diagrammare la relazione momento-curvatura ottenendo così un diagramma seppur semplificato ma che descriva bene il reale comportamento della sezione.

I punti di interesse sono:

- L'origine degli assi;
- Il gomito del diagramma, che corrisponde al contemporaneo snervamento delle armature tese e c compresse. Il punto è stato ricavato in precedenza è corrisponde a $(\chi_y\,;\ M_{sd,y})$;
- L'ultimo punto che corrisponde allo stato limite ultimo per il calcestruzzo, di coordinate $(\chi_u\,;\ M_{sd,u})$.

La duttilità della sezione risulta:

$$\mu_{1/r}^{c} = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

3 CALCOLO DEL DIAGRAMMA MOMENTO CURVATURA SEMPLIFICATO PER SEZIONI PRESSOINFLESSE

Si considera una sezione rettangolare pressoinflessa con doppia armatura simmetrica. Anche in questo caso il diagramma momento curvatura si costruisce studiando la sezione in due condizioni: all'innesco dello snervamento dell'acciaio e allo stato limite ultimo per collasso del calcestruzzo a compressione.
Si inizia con lo studio della condizione ultima, ossia quando il calcestruzzo ha raggiunto il limite a compressione. Da questa analisi si ricaverà il momento resistente della sezione e si ipotizzerà che sia lo stessa resistenza offerta dalla sezione all'innesco dello snervamento.

CONDIZIONE ULTIMA PER IL CALCESTRUZZO

La curvatura ultima della sezione si ricava attraverso la seguente relazione:

$$\chi_u = \left(\frac{1}{r}\right)_u = \frac{\varepsilon_{cu}}{y_u} = 0{,}8\,\frac{\varepsilon_{cu}}{H \cdot \nu}$$

Il termine ν indica lo sforzo normale adimensionalizzato, rispetto alla tensione di calcolo del calcestruzzo e alle dimensioni della sezione.

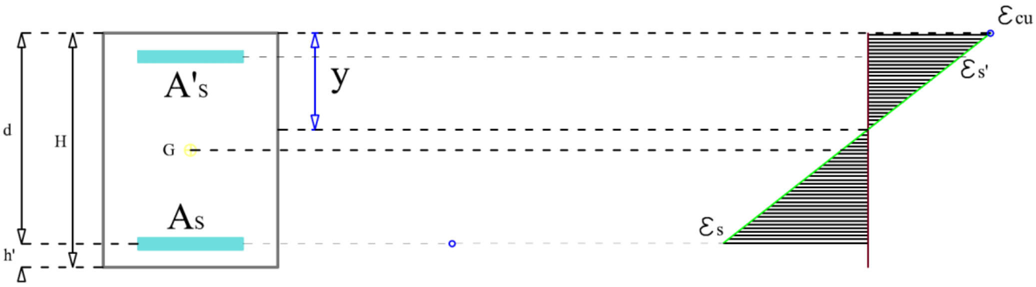
$$\nu = \frac{N_{sd}}{f_{cd}\; b\; H}$$

Si calcola ora il momento resistente della sezione pressoinflessa.
L'equilibrio alla traslazione impone:

$$-T + c_u + c' = N_{sd}$$

- $c' = A'_s \cdot f_{yd}$
- $T = A_s \cdot f_{yd}$
- $c_u = \alpha_{cc} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y \cdot \beta_1$

Poiché si sta valutando la condizione ultima per il calcestruzzo si deve ipotizzare che ambedue le armature siano snervate (Fig. 3.1).



(Fig. 3.1) sezione nella condizione ultima per il calcestruzzo.

Quest' ipotesi conduce a riscrivere:

$$c_u = N_{sd}$$

$$\alpha_{cc} \cdot f_{cd} \cdot b \cdot y_u \cdot \beta_1 = N_{sd}$$

$$\nu_u = \frac{N_{sd}}{f_{cd} \cdot bH}$$

$$y_u = \frac{\nu_u \cdot H}{\alpha_{cc} \cdot \beta_1}$$

$$\beta_1 = 0{,}810$$

$$\alpha_{cc} = 0{,}85$$

A questo punto occorre calcolare il momento resistente della sezione attraverso l'equilibrio alla rotazione attorno al baricentro della sezione pressoinflessa:

$$T \cdot \frac{h''}{2} + c' \cdot \frac{h''}{2} + N_{sd} \cdot \left(\frac{H}{2} - \beta_2 \cdot y_u\right) = M_{rd}$$

$$\beta_2 = 0{,}416$$

Si è ottiene così la coppia di valori $(\chi_u\,;\ M_{rd})$

INIZIO DELLO SNERVAMENTO

Nel caso degli elementi pressoinflessi, il gomito del diagramma momento-curvatura si ottiene con una migliore approssimazione se si considera il contemporaneo snervamento delle armature tese e compresse. Di seguito la relazione:

$$\chi_y = \left(\frac{1}{r}\right)_y = \frac{2\varepsilon_{yd}}{H - 2h'} = \frac{2\varepsilon_{yd}}{h''}$$

Dove $\varepsilon_{yd} = 1{,}86‰$ è la deformazione a cui corrisponde lo snervamento dell'acciaio sul legame elasto-plastico.
Si fa l'ipotesi che all'innesco dello snervamento dell'acciaio la sezione abbia raggiunto il momento resistente valutato per la condizione allo stato limite ultimo. In realtà questi valori sono molto prossimi e l'approssimazione è attendibile. In questo modo si ottiene la coppia di valori $(\chi_y\,;\ M_{rd})$

Si osserva che l'armatura compressa influisce poco sulla resistenza, mentre interviene molto sulla duttilità.

Quindi con l'ausilio di tre punti noti è possibile diagrammare la relazione momento-curvatura.

I punti di interesse sono:

- l'origine degli assi;
- Il gomito del diagramma, che corrisponde al contemporaneo snervamento delle armature tese e c compresse. Il punto è stato ricavato in precedenza è corrisponde a $(\chi_y\,;\ M_{rd})$;
- L'ultimo punto che corrisponde allo stato limite ultimo per il calcestruzzo, di coordinate $(\chi_u\,;\ M_{rd})$.

La duttilità della sezione pressoinflessa risulta:

$$\mu_{1/r}^{c} = \frac{\chi_u}{\chi_y}$$

Dunque gli strumenti progettuali per aumentare la duttilità flessionale dei pilastri sono:

- Limitare lo sforzo normale adimensionale aumentando le dimensioni del pilastro. In particolare, la NTC 2008 impone che sia $\nu < 0{,}55$ per le strutture progettate in Classe di Duttilità “alta” e $\nu < 0{,}65$ per le strutture progettate in Classe di Duttilità “bassa”;
- Conferire un adeguato grado di “confinamento” al calcestruzzo, aumentandone la capacità deformativa.

Per ottenere diagrammi che descrivano meglio la situazione reale, sia per gli elementi inflessi sia pressoinflessi, occorre valutare l’azione di confinamento offerta dalle staffe. Infatti un elemento in calcestruzzo armato confinato arriverà al collasso per valori deformativi maggiori del 3,5‰.

Se il calcestruzzo può raggiungere deformazioni maggiori allora l’elemento sarà anche più duttile, perciò ricavata la deformazione ultima per elementi confinati da staffe (nel caso di rinforzo anche FRP o altro) sarà sufficiente sostituirla al posto ε_{cu} e calcolare la duttilità dell’elemento.